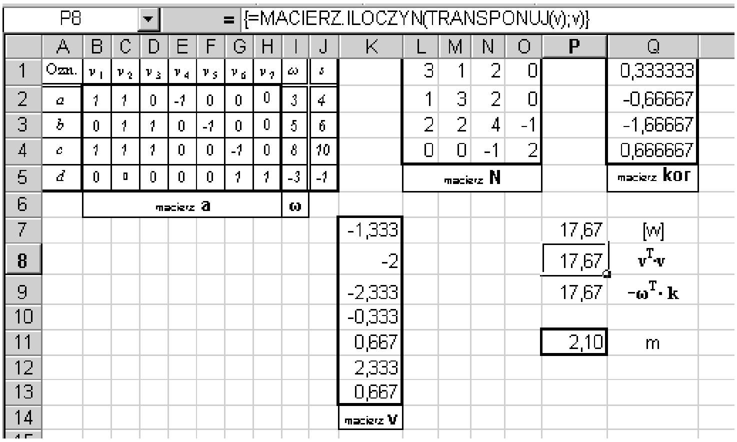

P8 = {=MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(v);v)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Ozn.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	ω	s		3	1	2	0		0,333333
2	a	1	1	0	-1	0	0	0	3	4		1	3	2	0		-0,66667
3	b	0	1	1	0	-1	0	0	5	6		2	2	4	-1		-1,66667
4	c	1	1	1	0	0	-1	0	8	10		0	0	-1	2		0,666667
5	d	0	0	0	0	0	1	1	-3	-1		macierz **N**					macierz **kor**
6		macierz **a**							$\boldsymbol{\omega}$								
7											-1,333					17,67	[w]
8											-2					17,67	$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}$
9											-2,333					17,67	$-\boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{k}$
10											-0,333						
11											0,667					2,10	m
12											2,333						
13											0,667						
14											macierz **v**						

Rys. 9.16. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych jednakowo dokładnych

C. KRAKOWIANY

9.19. Informacje wstępne o krakowianach

Krakowian jest zespołem liczb rozmieszczonych w prostokątnej tabeli o k kolumnach i w wierszach, dla którego zdefiniowano określone działania algebraiczne.

Jak już zaznaczono w ust. 9.8 dla krakowianów stosuje się nawiasy klamrowe. Krakowiany mogą mieć również formę tabeli w postaci siatki komórek, w które są wpisane poszczególne elementy krakowianu np.:

$$\begin{Bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{Bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Krakowiany, podobnie jak macierze, mogą być oznaczane symbolami literowymi (w postaci dużych lub małych liter), które w druku oznacza się czcionką pogrubioną, zaś w zapisie odręcznym - podkreśleniem symbolu np. **a**; **b, c** lub $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ w odróżnieniu od skalarów opisywanych linią cienką i bez podkreślenia.

Każdy krakowian składa się z poszczególnych liczb zwanych elementami krakowianu, rozmieszczonych w w wierszach i k kolumnach. Liczby (w, k) stanowią wymiary krakowianu. Położenie elementu a_{ij} krakowianu **a** w tabeli jest określane za pomocą wskaźników: 1) kolumny – i oraz 2) wiersza – j. Ogólny zapis krakowianu **a** zawierającego k kolumn i w wierszy jest następujący:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1w} & a_{2w} & \cdots & a_{kw} \end{Bmatrix} \qquad \text{element } a_{\overset{\text{1 wskaźnik kolumny}}{i}\underset{\text{2 wskaźnik wiersza}}{j}} \qquad \text{np. } \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 1{,}5 \\ 2{,}5 & -1{,}5 & 3 & 2{,}5 \\ -3 & 7 & 4 & 6 \end{Bmatrix}$$

Pojedyncze wiersze krakowianu **a**, będące również krakowianami, oznaczamy symbolem krakowianu i numerem wiersza wziętym w nawias np.

$$\mathbf{a}_{(2)} = \{\, 2 \quad 4 \quad 2 \quad 1{,}5 \,\}$$

Pojedyncze kolumny tego krakowianu oznacza się podobnie, lecz wskaźnika kolumny nie umieszcza się w nawiasie np.:

$$\mathbf{a}_2 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1{,}5 \\ 7 \end{Bmatrix}$$

Rodzaje krakowianów

Podobnie jak w rachunku macierzowym wyróżniane są krakowiany:

1) k. jednoelementowy, złożony z pojedynczego elementu: np. $\{-4\}$,
2) k. jednokolumnowy, posiadający jedną kolumnę, zaś dowolną liczbę wierszy.

$$\text{np.}\ \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad k=1,\ w \text{ – dowolne;}$$

3) k. jednowierszowy składający się z jednego wiersza, zaś dowolnej liczby kolumn.

$$\{3 \ \ -2 \ \ 1\} \quad k \text{ – dowolne, } w=1;$$

4) k. kwadratowy mający jednakową liczbę kolumn i wierszy;

$$\begin{Bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Bmatrix} \quad k = w;$$

przekątna główna 3; 8; 3 – elementy przekątne

5) k. kanoniczny trójkątny będący krakowianem kwadratowym, w którym na przekątnej głównej występują elementy niezerowe, zaś pod lub nad przekątną główną tylko elementy zerowe.

$$\begin{Bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{Bmatrix}$$

6) k. przekątny będący krakowianem kwadratowym, który na przekątnej głównej zawiera elementy niezerowe, zaś poza przekątną główną tylko elementy zerowe.

$$\begin{Bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Bmatrix}$$

7) k. jednostkowy $\boldsymbol{\tau}$, który jest krakowianem przekątnym o zmiennych wymiarach, zawierającym na przekątnej głównej same jedynki, w szczególności krako-

wianem jednostkowym może być krakowian $\{1\}$ tylko z jednym elementem równym 1. Wymiary krakowianu $\boldsymbol{\tau}$ dostosowuje się do wykonywanego działania np. iloczynu.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\tau} = \{1\}$$

8) k. zerowy jest to krakowian, w którym niezależnie od rozmiarów wszystkie elementy są równe zero.

$$\mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \{0\}$$

9) k. symetryczny jest to krakowian kwadratowy, którego elementy są ułożone symetrycznie względem przekątnej głównej (elementy kolejnych wierszy tego krakowianu są równe elementom kolejnych kolumn, czyli elementy spełniają warunek: $a_{ij} = a_{ji}$).

$$\underset{\mathbf{a}}{\begin{Bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 7 & 6 \end{Bmatrix}}$$

Elementy przekątne (przekątniowe) mają jednakowe wskaźniki wiersza i kolumny: $a_{11}=3$, $a_{22}=5$, $a_{33}=4$, $a_{44}=6$

10) k. stransponowany $\tau\mathbf{a}$ (transpoza lub transpozycja krakowianu) powstaje z krakowianu wyjściowego $\mathbf{a}$ poprzez zamianę kolejnych wierszy na kolejne kolumny.

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{Bmatrix}, \quad \tau\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$$

Krakowian symetryczny jest równy swej transpozie ($\mathbf{a} = \tau\mathbf{a}$). Symbolem transpozy jest grecka litera „τ" (tau) umieszczana przed symbolem krakowianu wyjściowego – $\tau\mathbf{a}$.

Elementami kontroli rachunku mogą być dopisywane do krakowianu: kolumna sumowa i wiersz sumowy (LANG A., 1982). Powstają one odpowiednio jako sumy elementów poszczególnych wierszy oraz kolumn, oddzielone od wyjściowych elementów krakowianu linią ciągłą lub kropkowaną np.

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ \hline -3 & 6 & 3 & 6 \end{array}\right\} \; ; \quad \left\{\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 2 & 4 & 8 \\ -1 & 5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 7 & 11 \\ 4 & -3 & 7 & 6 & 14 \\ \hline 8 & -1 & 11 & 14 & 32 \end{array}\right\}$$

suma wszystkich elementów krakowianu (suma generalna)

suma wszystkich elementów krakowianu (suma generalna)

Z podanego wyżej przykładu 2 wynika, że kolumna sumowa i wiersz sumowy krakowianu symetrycznego zawierają kolejno te same elementy. Niekiedy elementów sumowych nie oddziela się, lecz zaznacza je kursywą (BANACHIEWICZ T., 1959).

9.20. Podstawowe działania krakowianowe

9.20.1. Równość, dodawanie i odejmowanie, mnożenie krakowianów przez liczbę

Dwa krakowiany są równe wtedy, gdy każdy element jednego krakowianu jest równy odpowiadającemu mu położeniem elementowi drugiego krakowianu . Oba krakowiany muszą mieć przy tym jednakowe wymiary.

$$\left\{\begin{matrix} \sqrt{9} & \sin 30° & -2 \\ \sin 90° & \sqrt{4} & \frac{0}{2} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3 & \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} x & y \\ u & v \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right\}$$

Z powyższego zapisu wynikają równości algebraiczne: x=4; y=3; u=2; v=1.

Dodawanie (odejmowanie) dwóch krakowianów polega na dodaniu (odjęciu) elementów obu krakowianów znajdujących się w takim samym położeniu. Działanie to jest wykonalne tylko wtedy, gdy dodawane lub odejmowane krakowiany mają jednakowe wymiary.

$$\left\{\begin{matrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 5 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{matrix}\right\}$$

Iloczyn krakowianu przez liczbę (skalar) jest równy krakowianowi powstałemu w wyniku pomnożenia każdego elementu krakowianu wyjściowego przez tę liczbę. Iloczyn ten jest przemienny, czyli nie ma różnicy pomiędzy przedmnożeniem krakowianu przez liczbę, jak i jego pomnożeniem przez tę liczbę.

$$2\cdot\left\{\begin{matrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix}\right\}\cdot 2 = \left\{\begin{matrix} 6 & 2 & 10 \\ 2 & 8 & 6 \end{matrix}\right\}$$

Z powyższego określenia wynika także możliwość wyłączenia poza nawias krakowianu wspólnego podzielnika wszystkich jego elementów.

9.20.2. Iloczyn dwóch krakowianów

Mnożenie dwóch krakowianów polega na mnożeniu kolejnych kolumn pierwszego czynnika przez kolejne kolumny drugiego czynnika i zapisywaniu wyników w poszczególnych wierszach iloczynu.

Iloczynem a·b krakowianu **a** przez krakowian **b** nazywamy taki krakowian **c**, którego element c_{ij} położony w i-tej kolumnie oraz j-tym wierszu powstaje poprzez sumomnożenie elementów i-tej kolumny krakowianu **a** przez elementy j-tej kolumny krakowianu **b**.

W skrócie definicję iloczynu krakowianów można zapisać następująco:

$$\text{Jeżeli:} \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}, \qquad \text{to:} \qquad c_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j \tag{9.50}$$

Przy mnożeniu dwóch krakowianów należy każdą kolumnę pierwszego czynnika pomnożyć przez każdą kolumnę drugiego czynnika.

Przykład:

Iloczyn krakowianów jednokolumnowych:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{Bmatrix} = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{12} + a_{13}\cdot b_{13} = \{c_{11}\} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{Bmatrix} = -2+6-6 = -2$$

Mnożenie krakowianów w postaci pojedynczych kolumn jest przemienne.

Wykonalność mnożenia: Mnożenie dwóch krakowianów jest wykonalne tylko wtedy, gdy krakowian **a** posiada tyle wierszy, ile wierszy zawiera krakowian **b**. Liczba kolumn krakowianu **a** i liczba kolumn krakowianu **b** mogą być dowolne.

Wymiary iloczynu: krakowian $\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ ma tyle kolumn, ile ich posiada krakowian **a** oraz tyle wierszy, ile kolumn ma krakowian **b**.

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \\ c_{13} & c_{23} \end{Bmatrix} \tag{9.51}$$

$$c_{11} = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1}, \quad c_{12} = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2}, \quad c_{13} = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3}$$

$$c_{21} = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1}, \quad c_{22} = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2}, \quad c_{23} = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3}$$

Przykład:

- bez kolumn sumowych:

$$\underset{\mathbf{a}}{\begin{Bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \\ 1 & 6 \end{Bmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{b}}{\begin{Bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{Bmatrix}} = \underset{\mathbf{c}}{\begin{Bmatrix} -13 & -20 \\ -7 & 22 \\ 12 & 49 \end{Bmatrix}}$$

- z kontrolnymi kolumnami sumowymi dołączonymi do iloczynu:

$$\underset{\mathbf{a}}{\left\{\begin{array}{cc:c} 3 & 5 & 8 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{array}\right\}} \cdot \underset{\mathbf{b}}{\left\{\begin{array}{ccc:c} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right\}} = \underset{\mathbf{c}}{\left\{\begin{array}{cc:c} -13 & -20 & -33 \\ -7 & 22 & 15 \\ 12 & 49 & 61 \\ \hdashline -8 & 51 & 43 \end{array}\right\}}$$

Kontrola:

- Obliczenie elementów kontrolnych kolumny sumowej iloczynu:
  $\mathbf{a}_s\cdot \mathbf{b}_1= c_{s1} = 8\cdot(-2)+2\cdot 2+7\cdot(-3)=-16+4-21=-33$
  $\mathbf{a}_s\cdot \mathbf{b}_2= c_{s2} = 8\cdot 0+2\cdot 4+7\cdot 1=0+8+7=15$
  $\mathbf{a}_s\cdot \mathbf{b}_3= c_{s3} = 8\cdot 3+2\cdot 1+7\cdot 5=24+2+35=61$
  $\mathbf{a}_s\cdot \mathbf{b}_s= c_{ss} = 8\cdot 1+2\cdot 7+7\cdot 3=8+14+21=43$ (suma generalna).
- Obliczenie elementów kontrolnych wiersza sumowego iloczynu:
  $\mathbf{a}_1\cdot \mathbf{b}_s= c_{1s} = 3\cdot 1+(-2)\cdot 7+1\cdot 3=3-14+3=-8$
  $\mathbf{a}_2\cdot \mathbf{b}_s= c_{1s} = 5\cdot 1+4\cdot 7+6\cdot 3=5+28+18=51$
  $\mathbf{a}_s\cdot \mathbf{b}_s= c_{ss} = 8\cdot 1+2\cdot 7+7\cdot 3=8+14+21=43$ (suma generalna).

Mnożenie dwóch krakowianów nie jest przemienne tzn. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \neq \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$. Utwórzmy przestawiony iloczyn krakowianów z poprzedniego przykładu.

$$\underset{\mathbf{b}}{\left\{\begin{array}{ccc:c}-2 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 1 & 7\\ -3 & 1 & 5 & 3\end{array}\right\}}\cdot\underset{\mathbf{a}}{\left\{\begin{array}{cc:c}3 & 5 & 8\\ -2 & 4 & 2\\ 1 & 6 & 7\end{array}\right\}}=\underset{\tau\mathbf{c}}{\left\{\begin{array}{ccc:c}-13 & -7 & 12 & -8\\ -20 & 22 & 49 & 51\\ \hdashline -33 & 15 & 61 & 43\end{array}\right\}}$$

Jak wynika z powyższego przykładu zachodzi prawidłowość:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{c} \quad \text{lecz} \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\tau\mathbf{c} \tag{9.52}$$

Zamiana kolejności czynników powoduje, że z takiego iloczynu otrzymamy krakowian będący transpozą krakowianu $\mathbf{c}$, czyli $\tau\mathbf{c}$.

Iloczyny krakowianu **a** i krakowianu jednostkowego **τ**.

- Iloczyn $\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau}$ (pomnożenie **a** przez **τ**)

$$\underset{\mathbf{a}}{\left\{\begin{array}{cc}3 & 5\\ -2 & 4\\ 1 & 6\end{array}\right\}}\cdot\underset{\boldsymbol{\tau}}{\left\{\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right\}}=\underset{\mathbf{a}}{\left\{\begin{array}{cc}3 & 5\\ -2 & 4\\ 1 & 6\end{array}\right\}}$$

- Iloczyn $\boldsymbol{\tau}\ \mathbf{a}$ (przedmnożenie **τ** przez **a**)

$$\underset{\boldsymbol{\tau}}{\left\{\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right\}}\cdot\underset{\mathbf{a}}{\left\{\begin{array}{cc}3 & 5\\ -2 & 4\\ 1 & 6\end{array}\right\}}=\underset{\tau\mathbf{a}}{\left\{\begin{array}{ccc}3 & -2 & 1\\ 5 & 4 & 6\end{array}\right\}}$$

Przedmnożenie krakowianu przez krakowian jednostkowy daje jako wynik jego transpozę, co zostało uwzględnione w jej symbolu – $\tau\mathbf{a}$.

9.20.3. Kwadrat krakowianu

Podnoszenie krakowianu do kwadratu polega na pomnożeniu go przez siebie:

$$\mathbf{a}^2=\mathbf{a}\ \mathbf{a} \tag{9.53}$$

$$\left\{\begin{array}{cc}3 & 5\\ -2 & 4\\ 1 & 6\end{array}\right\}^2=\left\{\begin{array}{cc}3 & 5\\ -2 & 4\\ 1 & 6\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{cc}3 & 5\\ -2 & 4\\ 1 & 6\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{cc}14 & 13\\ 13 & 77\end{array}\right\}$$