

Spis treści

Wstęp	9
-----------------	---

Rozdział I

LICZBY I ICH ZBIORY

1. Elementy logiki	13
2. Zbiory	19
2.1. Działania na zbiorach	20
2.2. Zbiory liczbowe	23
2.3. Zapis zbioru bez użycia symbolu bezwzględnej wartości	24
2.4. Zapis przedziału za pomocą symbolu bezwzględnej wartości	25
3. O ułamkach okresowych	28
4. O procentach	29
4.1. Tabela przybliżonych wartości kapitałów	33
5. Szacowanie wartości liczbowych wyrażeń	34
5.1. Błąd przybliżenia	37
6. Wzory uproszczonego mnożenia	38
7. Trójki pitagorejskie	39
8. Średnie	40
9. Zasada indukcji matematycznej	47
10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną	50
11. Tablica pierwszego tysiąca liczb pierwszych	52
12. Zadania	54
12.1. Zakres podstawowy	54
12.2. Zakres rozszerzony	56

Rozdział II

FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI

1. Podstawowe definicje i własności	63
2. Przekształcanie wykresów funkcji	70
3. Zadania	74

Rozdział III

WIELOMIANY I FUNKCJE WYMIERNE

1.	Funkcja liniowa	77
1.1.	O nachyleniu i równaniu prostej	79
1.2.	Równania i nierówności liniowe	82
1.3.	Metoda podstawiania	83
1.4.	Metoda eliminacji Gaussa	86
1.5.	Metoda wyznaczkowa rozwiązywania układu równań	88
1.6.	Elementy optymalizacji liniowej w liceum	93
1.7.	Nierówności liniowe z parametrem	96
2.	Trójmian kwadratowy	98
2.1.	Wielomian drugiego stopnia	98
2.2.	Parabola	100
2.3.	Równanie paraboli	100
2.4.	Parabola „normalna”	101
2.5.	Rozkład wyrażenia kwadratowego na czynniki	106
2.6.	Podstawowe typy i położenia wykresów funkcji kwadratowej	109
2.7.	Równanie kwadratowe	110
2.8.	Wzory Viéte’a	110
2.9.	Różne własności funkcji kwadratowej w zadaniach	116
2.10.	Położenie miejsc zerowych trójmianu kwadratowego	120
2.11.	Rozmieszczenie pierwiastków równania kwadratowego na osi liczbowej (raz jeszcze)	125
2.12.	O równaniach kwadratowych typu $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) + c = 0$	131
3.	Rozwiązywanie zadań prowadzących do równań i nierówności stopnia drugiego (przykłady)	140
3.1.	Rozwiązywanie równań, nierówności i układów równań stopnia drugiego z wartością bezwzględną lub parametrem	140
3.2.	Rozwiązywanie algebraiczne i graficzne układów równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego	144
3.3.	Rozwiązywanie zadań tekstowych prowadzących do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą	147
4.	Wielomiany	149
4.1.	Wielomian jednej zmiennej	149
4.2.	Działania na wielomianach	151
5.	Nierówności wielomianowe	162
6.	Funkcja homograficzna	165
6.1.	Działania na wyrażeniach wymiernych	165
6.2.	Przykłady rozwiązań równań wymiernych	166
6.3.	Przykłady rozwiązań nierówności wymiernych	173
6.4.	Funkcja wymierna i homograficzna	177
7.	Wzór dwumianowy Newtona	179

8.	Zadania	185
	8.1. Zakres podstawowy	185
	8.2. Zakres rozszerzony	195

Rozdział IV

TRYGNOMETRIA

1.	Określenia, własności, wzory	215
	1.1. Kąt	215
	1.2. Miara kąta	216
	1.3. Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego	218
	1.4. Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta	218
	1.5. Znaki wartości funkcji trygonometrycznych	220
	1.6. Wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych miar kątów	220
	1.7. Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych	221
	1.8. Okresowość funkcji trygonometrycznych	221
	1.9. Własności funkcji okresowych	222
	1.10. Podstawowe tożsamości trygonometryczne	222
	1.11. Tożsamości trygonometryczne	223
	1.12. Wzory redukcyjne	226
	1.13. Wzory dla kątów dopełniających się do $\frac{\pi}{2}$ (90°)	226
	1.14. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów	226
	1.15. Funkcje trygonometryczne wielokrotności argumentu	227
	1.16. Suma i różnica funkcji trygonometrycznych	229
	1.17. Wyrażenie $\sin x$, $\cos x$ i $\operatorname{tg} x$ w zależności od $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	231
2.	Funkcje trygonometryczne, ich wykresy i własności (\sin , \cos)	232
3.	Funkcje trygonometryczne, ich wykresy i własności (tg , ctg)	233
4.	Wykresy funkcji trygonometrycznych	234
5.	Równania trygonometryczne	241
6.	Różne sposoby rozwiązania jednego równania trygonometrycznego	243
7.	Nierówności trygonometryczne	248
8.	Zadania	258
	8.1. Zakres podstawowy	258
	8.2. Zakres rozszerzony	261
9.	Tablice trygonometryczne	265

Rozdział V

CIĄGI LICZBOWE

1.	Przykłady ciągów i ich własności	266
2.	Ciągi ograniczone	269
3.	Granica ciągu	270

4.	Granica ciągu określonego rekurencyjnie	276
5.	Ciąg arytmetyczny	276
5.1.	Podstawowe wzory dotyczące ciągu arytmetycznego	277
5.2.	Monotoniczność ciągu arytmetycznego	278
6.	Ciąg geometryczny	278
6.1.	Podstawowe wzory dotyczące ciągu geometrycznego:	279
6.2.	Monotoniczność ciągu geometrycznego	279
7.	Szereg geometryczny	282
8.	Zadania	288
8.1.	Zakres podstawowy	288
8.2.	Zakres rozszerzony	289

Rozdział VI

PLANIMETRIA

1.	Trójkąty	292
1.1.	Wzory na pole dowolnego trójkąta	293
2.	Czworokąty	297
3.	Koło, okrąg i ich części	302
4.	Twierdzenie Pitagorasa	304
5.	Twierdzenie Talesa	307
5.1.	Cechy przystawiania trójkątów	308
5.2.	Wielokąty	309
6.	Twierdzenie sinusów i kosinusów	311
7.	Przekształcenia geometryczne	314
8.	Zadania	320
8.1.	Zakres podstawowy	320
8.2.	Zakres rozszerzony	323

Rozdział VII

GEOMETRIA ANALITYCZNA

1.	O wektorach	327
1.1.	Iloczyn skalarny dwóch wektorów	331
1.2.	Współrzędne wektora na płaszczyźnie	333
1.3.	Długość wektora	335
2.	Metody geometrii analitycznej	336
2.1.	Odległość punktu od prostej $y = kx + q$	341
2.2.	Postać ogólna równania prostej	342
2.3.	Postać odcinkowa równania prostej	343
2.4.	Wzajemne położenie prostych oraz wektorów	345
2.5.	Równanie okręgu	347
2.6.	Wzajemne położenie dwóch okręgów	350

3. Współrzędne punktu symetrycznego do danego względem dowolnie położonej prostej na płaszczyźnie	353
4. Zadania	358
4.1. Zakres podstawowy	358
4.2. Zakres rozszerzony	360

Rozdział VIII

STEREOMETRIA

1. Graniastopy i ostrosłupy. Walec, stożek, kula	364
1.1. Prostopadłościan	364
1.2. Sześcian	366
1.3. Pole powierzchni i objętość graniastopu prostego	368
1.4. Pole powierzchni i objętość walca	369
1.5. Pole powierzchni i objętość ostrosłupa	371
1.6. Pole powierzchni i objętość stożka	374
1.7. Pole powierzchni i objętość kuli	375
2. Wielościany foremne	376
3. Wyznaczanie związków miarowych w bryłach z zastosowaniem trygonometrii	378
4. Przekroje płaskie	384
5. Bryły podobne	387
6. Zadania	388
6.1. Zakres podstawowy	388
6.2. Zakres rozszerzony	389

Rozdział IX

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. Elementy kombinatoryki	392
1.1. Związek wariacji z powtórzeniami z liczbą funkcji	393
2. Empiryczne podstawy rachunku prawdopodobieństwa	397
2.1. Inne pojęcia i własności prawdopodobieństwa	400
3. Tabelki dla par zdarzeń losowych	402
4. Prawdopodobieństwo warunkowe. Niezależność zdarzeń	405
5. Drzewka (stochastyczne)	408
6. Schemat Bernoulliego	414
7. Elementy statystyki opisowej	416
8. Zadania	421
8.1. Zakres podstawowy	421
8.2. Zakres rozszerzony	424

Rozdział X

FUNKCJE WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE

1. Funkcja potęgowa	428
-------------------------------	-----

1.1.	Własności funkcji potęgowej	430
2.	Pierwiastki	431
2.1.	Własności pierwiastka arytmetycznego	432
3.	Potęgi	433
4.	Funkcja wykładnicza	440
4.1.	Własności funkcji wykładniczej	441
4.2.	Wykresy funkcji wykładniczych	442
5.	Równania i nierówności wykładnicze	443
6.	Określenie logarytmu i własności logarytmów	447
7.	Funkcja logarytmiczna	449
7.1.	Własności funkcji logarytmicznej	450
7.2.	Podstawowe metody rozwiązywania równań logarytmicznych	451
7.3.	Podstawowe metody rozwiązywania nierówności logarytmicznych	452
8.	Zadania – zakres rozszerzony	457

Rozdział XI

CIĄGŁOŚĆ I POCHODNA FUNKCJI

1.	Pojęcie granicy funkcji	462
1.1.	Twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji	464
1.2.	Sposoby obliczania granic	465
1.3.	Granica niewłaściwa, granica w nieskończoności, granice jednostronne	466
1.4.	Asymptoty wykresu funkcji (Asymptota – niemalstyczna)	468
2.	Ciągłość funkcji	470
3.	Pochodna funkcji	476
3.1.	Przyrost argumentu i wartości funkcji	476
3.2.	Pochodna funkcji w punkcie	476
3.3.	Podstawowe wzory na obliczanie pochodnych	479
3.4.	Twierdzenia o działaniach arytmetycznych na pochodnych	480
3.5.	Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie	482
4.	Zastosowania pochodnej funkcji	485
4.1.	Monotoniczność funkcji	485
4.2.	Punkty krytyczne funkcji	486
4.3.	Ekstrema lokalne funkcji	486
4.4.	Warunek konieczny ekstremum	488
4.5.	Warunek wystarczający ekstremum	489
4.6.	Najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale domkniętym	490
4.7.	Badanie przebiegu zmienności funkcji	493
4.8.	Zadania optymalizacyjne	495
5.	Zadania	500

Wstęp

Przedstawiony wybór przykładów, zadań i elementów teorii podyktowany jest zbiorem wymagań, któremu sprostać muszą uczniowie przystępujący do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym.

W wyborze tym nie powinno już właściwie być zagadnień związanych z rachunkiem zdań oraz działu poświęconego rachunkowi różniczkowemu, jednak w ostatecznej wersji zagadnienia te występują. Złożyło się na to kilka powodów. Najważniejsze z nich są następujące: przyjmując zasadę, że podstawa programowa nie jest tożsama z programem nauczania, możemy poszerzyć program przyjęty przez szkołę, pod warunkiem jednak, że nauczyciel będzie miał czas na realizację tego poszerzenia. Nic nie stoi na przeszkodzie, by w dobrym liceum nauczać rachunku różniczkowego. Rangę nauczania dodatkowego materiału podnieść można poprzez np. wzmocnienie oceniania wewnątrzszkolnego i roli oceny końcowej.

W książce znajdują się elementy teorii oraz około 300 zadań rozwiązanych jako przykłady i ponad 300 zadań do samodzielnej pracy ucznia. Do zadań tych podano odpowiedzi.

Podane rozwiązania zadań nie zawsze są zredagowane w optymalny sposób, gdyż nie zawsze byłoby to z korzyścią dla Czytelnika. Czasem w rozwiązaniu zachowano więcej rachunków, niż to jest konieczne, a czasem pominięto niektóre kroki rozwiązania, uznając je za oczywiste. Poniżej podaję przykład redakcji rozwiązania zadania, którą można uznać za optymalną. I jeszcze jedna, istotna uwaga: istnieje niewiele zadań, które można rozwiązać jedną tylko metodą (sposobem). Często takich sposobów jest wiele, co jest podkreślane na kartach tej książki.

⇒ Przykład redakcji rozwiązania zadania

↗ Zadanie

Dane są dwie funkcje określone w zbiorze R_0^+ liczb rzeczywistych nieujemnych i o wartościach w zbiorze R liczb rzeczywistych:

$$f_1: R_0^+ \rightarrow R, f_1(x) = x^3,$$

$$f_2: R_0^+ \rightarrow R, f_2(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 4.$$

- a) Pokaż, że punkt $O = (0; 0)$ jest punktem wspólnym wykresów tych funkcji oraz wyznacz drugi punkt $S = (x_1; y_1)$ przecięcia się wykresów funkcji f_1 i f_2 ;
- b) Nakreśl wykresy funkcji f_1 i f_2 w prostokątnym układzie współrzędnych xOy ;
- c) Prosta $g: x = a, 0 \leq a \leq x_1$, przecina wykresy funkcji f_1 i f_2 w punktach A i B . Dla jakiej wartości parametru a pole powierzchni trójkąta OAB jest maksymalne? Podaj odpowiedź z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Rozwiązanie

Ad. a) Wykresami funkcji f_1 i f_2 są odpowiednio zbiory:

$$W_{f_1} = \{(x; y) \in R^2; y = f_1(x) = x^3, x \in R_0^+\}$$

$$W_{f_2} = \left\{ (x; y) \in R^2; y = f_2(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 4, x \in R_0^+ \right\}$$

Dla punktu $O = (0, 0)$ mamy:

$$f_1(0) = 0^3 = 0, \text{ a więc } O \in W_{f_1}$$

$$f_2(0) = -\frac{1}{4}(0-4)^2 + 4 = 0, \text{ a więc } O \in W_{f_2}$$

Zatem

$$O \in W_{f_1} \cap W_{f_2}.$$

Drugi punkt S przecięcia się wykresów funkcji f_1 i f_2 znajdziemy rozwiązując równanie

$$x^3 = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 4, x \in R_0^+.$$

Otrzymujemy:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{129}}{8} < 0, x_3 = \frac{-1 + \sqrt{129}}{8} > 0.$$

zatem

$$S = \frac{-1 + \sqrt{129}}{8}; \left(\frac{-1 + \sqrt{129}}{8} \right)^3.$$

$$[S \approx (1,29; 2,17)]$$

Ad. b) Trójkąt ma wierzchołki o współrzędnych:

$$O = (0; 0), A = (a; a^3), B = \left(a; -\frac{1}{4}a^2 + 2a \right).$$

Jeżeli za podstawę trójkąta AOB (Rys.) wybierzemy odcinek AB , którego długość wynosi $a \left| a^2 + \frac{1}{4}a - 2 \right|$, to jego wysokość będzie równa a . Zatem pole P powierzchni trójkąta OAB w zależności od a opisuje funkcja

$$P(a) = \frac{1}{2}a^2 \left| a^2 + \frac{1}{4}a - 2 \right|, \quad 0 \leq a \leq x_1.$$

Ponieważ w przedziale $(0; x_1)$ trójmian $a^2 + \frac{1}{4}a - 2$ przyjmuje wartości ujemne, więc

$$P(a) = -\frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{8}a^3 + a^2.$$

